

افشین خاصه خان

این عدد در کدام مجموعه است؟

سلام دوستان. به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. این بار می‌خواهم ماجرای دانش‌آموزی را برایتان تعریف کنم که در تشخیص انواع عددها کمی مشکل داشت. **عسل هاشمی** دانش‌آموزی است که امسال می‌خواهد دهم را بخواند. وقتی که به درمانگاه آمد، کلی سؤال توی ذهنش بود و بی‌صبرانه می‌خواست به جواب سؤال‌اتش برسد. بعد از سلام و احوال‌پرسی از او خواستم هر چه درباره عددها می‌داند بگوید. عسل پرسید: می‌توانم به جای گفتن بنویسم؟

● گفتم هر جور راحتی، و عسل شروع کرد به نوشتن:

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه عددهای طبیعی

$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه عددهای حسابی

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه عددهای صحیح

● پرسیدم: «می‌دانی چرا از حرف‌های انگلیسی برای نشان دادن این مجموعه‌ها استفاده کرده‌اند؟»

عسل گفت: «الان که گفتید کنجکاو شدم بدانم. حدس می‌زنم حرف اول نام‌های انگلیسی آن‌ها باشد.»

● به او گفتم: «درست حدس زدی. می‌دانی طبیعی به انگلیسی چه می‌شود؟»

عسل که معلوم بود انگلیسی‌اش خوب است، بلافاصله گفت: «Natural» و ادامه داد: «با اینکه معنی‌اش را هم می‌دانستم، ولی دقت نکرده بودم.»

● گفتم: «آن دوتای بعدی را هم به‌عنوان تحقیق در خانه انجام بده.»

سپس عسل گفت: «مجموعه بعدی عددهایی هستند که به صورت کسری نوشته می‌شوند؛ مثل $\frac{2}{3}$ »

● پرسیدم: «می‌توانی مثل مجموعه‌های بالا با اعضا نشان‌شان بدهی؟»

کمی مکث کرد و گفت: «نمی‌دانم از کدام عدد شروع کنم؟»

● گفتم: «مثلاً از $\frac{1}{2}$ شروع کن.»

عسل شروع کرد به نوشتن: $\{\dots, \frac{1}{11}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots\}$. از او پرسیدم: «به نظرت عدد بعد از $\frac{1}{10}$ می‌شود $\frac{1}{9}$ ؟»

مکثی کرد و گفت: «نه! راست می‌گویید. مثلاً من می‌توانم بین $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{9}$ کلی عدد بنویسم؛ مثل $\frac{2}{19}$. اتفاقاً در

کتاب هشتم این کار را می‌کردیم. آقا نه، نمی‌شود با اعضا نوشت.»

● به او گفتم: «به نتیجه درستی رسیدی. این مجموعه را با نماد ریاضی نشان می‌دهند. می‌توانی بنویسی؟»

عسل گفت: «زیاد مطمئن نیستم. اگر اشتباه نکنم، با Q نشان می‌دهند.»

● تأییدش کردم و گفتم: «شما اشاره کردی که این عددها کسری هستند. من هم یادآوری می‌کنم

که صورت و مخرج این کسر عددهای صحیح بودند. حالا شما مجموعه را بنویس تا من هم

بگویم چرا با Q نشان می‌دهند.»

عسل شروع کرد به نوشتن: $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \right\}$. از من پرسید: «درسته استاد؟»

● گفتم: «کامل نشده. شما فکر کن بین عدد صحیحی هست که نتوانی در

مخرج بنویسی؟»

گویی چیزی به سرعت به یادش آمده باشد، گفت: «صفر، ما

نمی‌توانیم صفر را در مخرج بنویسیم؛ مثلاً بنویسیم: $\frac{3}{0}$ »

بعد گفت: «استاد در صورت هم که نمی‌شود

نوشت مثلاً $\frac{0}{0}$ ؟»

● پرسیدم: «همین $\frac{0}{0}$ را

می‌توانی معنی کنی؟»



گفت: «هیچی را به هفت قسمت تقسیم کنیم که هر کدام می شود هیچی. استاد، صورت کسر می تواند صفر بشود.»

● گفتیم: «حالا مجموعه Q رو که نوشته بودی، کامل کن: $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ »

گفت: «استاد دوست دارم درباره اسمش هم صحبت کنیم؟»

● گفتیم: «چه بهتر. اسم این مجموعه را به خاطر می آوری؟»

گفت: «راستش یادم رفته است.»

● پرسیدم: «کدام کتاب درسی پیشت هست؟»

گفت: «فقط نهم.»

● گفتیم: «اگر اشتباه نکنم، این مجموعه در فصل اول کتاب هشتم، به طور کامل معرفی شده است. خوش بختانه در فصل دوم

کتاب نهم هم یادآوری شده است. پس همین الان فصل دوم از کتاب نهم را باز کن تا اسم مجموعه را به خاطر بیاوری.»

عسل شروع کرد به ورق زدن کتاب ریاضی نهم و بعد از چند لحظه گفت: «آها! یادم آمد، مجموعه عددهای گویا. پس آن وقت

Q حرف اول کدوم کلمه می شود؟»

● جواب دادم: «Quotient. معنی اش می شود خارج قسمت. اگر دوست داشتی می توانی اطلاعات بیشتری به دست بیاوری.

این هم یک پروژه دیگر باشد. حالا سوآلی از تو دارم: آیا ما می توانیم همین عددهای گویا را به شکل دیگری هم بنویسیم؟

مثلاً در $\frac{1}{4}$ می توانی صورت را به مخرج تقسیم کنی. آن وقت خارج قسمت چه عددی می شود؟»

عسل گفت: «خب معلوم است یک عدد اعشاری.»

● به او گفتیم: «من چند عدد گویا می گویم، شما همین کار را بکن و فرم اعشاری شان را بنویس.»

گفت: «چشم» و نوشت:

$$\frac{1}{4} = 0.25 \text{ و } \frac{31}{25} = 1.24 \text{ و } \frac{13}{20} = 0.65$$

● پرسیدم: «این ها چه ویژگی مشترکی دارند؟»

عسل گفت: «باقی مانده همه آن ها صفر شد.»

● به او آفرین گفتیم و پرسیدم: «الان به مخرج این کسرها دقت کن. اگر مخرج را تجزیه کنی، فقط کدام عامل های اول وجود

دارند؟»

با کمی مکث جواب داد: «فقط ۲ و ۵.»

● گفتیم: «حالا می توانی حدس بزنی، چرا آخر سر باقی مانده این کسرها صفر می شود؟»

جوابی نداد. از او پرسیدم: «در تقسیم، وقتی ارقام مقسوم تمام می شوند و شما می خواهید ارقام بعد از ممیز را در خارج قسمت

حساب کنید، چه رقمی را جلوی باقی مانده می گذارید؟»

عسل گفت: «صفر.»

● پرسیدم: «یعنی آن عدد مضرب ۱۰ می شود، درست است؟»

تأیید کرد. گفتیم: «حالا بقیه اش را خودت بگو.»

گفت: «عدد مضرب ۱۰، هم پر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیر است. به همین خاطر، باقی مانده در نهایت صفر می شود. چه جالب!

اسمشان الان یادم آمد. کاملاً به این موضوع ربط دارد. مختوم، یعنی تمام شده، دیگر هیچ وقت از یادم نمی رود.»

● گفتیم: «حالا فرم اعشاری این دو عدد گویا را سعی کن بنویسی: $\frac{1}{7} = 0.142857142857... \text{ و } \frac{1}{3} = 0.333333... \text{ این ها چه}$

ویژگی مشترکی دارند؟»

عسل گفت: «باقی مانده شان صفر نمی شود و در خارج قسمت شان رقم های بعد از ممیز با ترتیب خاصی دارند تکرار می شوند.»

● گفتیم: «خوب تشخیص دادی. به همین خاطر است که به آن ها می گویند متناوب ساده؛ یعنی تکرار شوند. حالا به مخرج

این ها دقت کن.»

عسل گفت: «می توانم حدس بزنم، مخرج شان اصلاً عامل های اول ۲ و ۵ را ندارد و به همین خاطر باقی مانده صفر نمی شود،

چون عددهای مضرب ۱۰ به این عامل ها بخش پذیر نیستند.»

● تحسینش کردم و گفتیم: «نوع سومی هم از عددهای گویا را داریم که ترکیبی از این دوتا هستند.»

به سرعت گفت: «یعنی مخرج شان، هم عامل اول ۲ یا ۵، و هم عامل اول غیر از ۲ و ۵ دارد، درست است؟»

● گفتیم: «خوب راه افتادی. پس مثال ها را هم خودت بگو.»

گفت: « $\frac{11}{6} = 1.833333... \text{ و } \frac{5}{14} = 0.3571428571428571... \text{ و } \frac{1}{6} = 0.166666... \text{ این دو عدد آن است که بعد از ممیز تعدادی از}$

ارقام شان تکرار نمی شوند و تعداد دیگری تکرار می شوند. اسم شان را هم کاملاً به یادم آوردم: متناوب مرکب.»

● پرسیدم: «می توانی به من بگویی اولی چرا متناوب ساده شد؟»

گفت: «چون همه ارقام بعد ممیزش تکرار می شدند.»

● گفتیم: «حالا می توانی عددهای گویا را در یک جمع بندی معرفی کنی؟»

گفت: «ما اگر عددهای گویا را به فرم اعشاری بنویسیم، سه نوع عدد اعشاری خواهیم داشت: مختوم، متناوب ساده و متناوب

مرکب. خیلی خوب شد استاد، حالا دیگر همه عددهای اعشاری را می شناسم.»

- گفتیم: «مطمئن؟»
- گفت: «مگر باز هم هست؟!»
- گفتیم: «ماشین حساب را در بیاور و $\sqrt{2}$ را به صورت اعشاری بنویس: $\sqrt{2} = 1/414213562373\dots$
- حالا دقت کن ببین این عدد اعشاری با آن سه نوع قبلی چه فرقی دارد.»
- با کمی تأمل جواب داد: «معلوم است که مختوم نیست. تکرار هم دارد، ولی تکرارش مثل عددهای اعشاری متناوب، نظم خاصی ندارد. پس متناوب هم نیست، جالب شد، الان مطمئنم این عدد گویا نیست. یعنی نمی‌توانیم آن را به صورت کسر بنویسیم.»
- پرسیدم: «پس به آن چه بگوییم؟»
- گفت: «فکر کنم گنگ می‌گفتم؟»
- گفتیم: «ببین باز هم یادت آمد. گنگ کلمه‌ای است مقابل کلمه گویا. به همین خاطر نمادش هم این‌طور نوشته می‌شود: Q' ؛ یعنی متمم Q . خوب حالا عدد معروفی هست که در محاسبه‌های دایره از آن استفاده می‌کردی، چه عددی است؟»
- گفت: «عدد پی» و پس از نوشتن در ماشین حساب و محاسبه ارقام اعشاری $\pi = 3/14159265359\dots$
- گفت: «این هم دقیقاً همان خصوصیت‌ها را دارد که! پس π هم گنگ است.»
- گفتیم: «موافقی از اول مروری بکنیم؟»
- گفت: «خیلی هم خوب می‌شود.»
- پرسیدم: «آن سه مجموعه اول، یعنی N ، W و Z تکلیفشان چه می‌شود؟ آن‌ها گویا می‌شوند یا گنگ؟ مثلاً عدد ۲ را به صورت کسری و اعشاری بنویس تا مشخص بشود.»
- عسل نوشت: $2 = \frac{2}{1} = 2/0$ و گفت: «گویاست. صفر و عددهای منفی هم همین‌طور، همه گویا هستند. یعنی می‌توانم بنویسم: $0 < N \subset W \subset Z \subset Q$ »
- تشویقش کردم و گفتم: «حالا فقط به مجموعه مانده است. سعی کن مجموعه‌ای را فرض کنی که از اجتماع عددهای گویا و گنگ ساخته می‌شود. می‌دانی چه اسمی برایش گذاشته‌اند؟»
- عسل با صداقت گفت: «کتاب ریاضی نهم را باز کردم و آن را دیدم؛ مجموعه عددهای حقیقی و با R نشانش می‌دهیم.»
- پرسیدم: « R حرف اول چه کلمه‌ای می‌شود؟»
- عسل با صدای رسایی گفت: « $Real$ ، به معنی حقیقی.»
- گفتیم: «حالا وقت آن است که بحث را با رسم نمودار ون این مجموعه‌ها جمع کنیم. می‌توانی این کار را بکنی؟»
- عسل گفت: «فکر کنم بتوانم.»
- گفتیم: «از این بحث‌مان می‌توانی چکیده‌ای هم در کنار نمودار ون بنویسی؟»
- با سر تأیید کرد و دست به کار شد:
- هر عدد حقیقی را می‌شود به صورت یک عدد اعشاری نوشت.
- $\hat{E}$ اگر عدد اعشاری مختوم یا متناوب باشد، گویاست و می‌توانیم آن را به صورت کسری بنویسیم که صورت و مخرجش عددهای صحیح‌اند و مخرجش صفر نیست.
- $\hat{E}$ اگر عدد اعشاری مختوم یا متناوب نباشد، گنگ است و نمی‌توانیم آن را به صورت کسری بنویسیم که صورت و مخرجش صحیح باشند.
- $\hat{E}$ هر عدد طبیعی، حسابی و صحیح گویاست.

